RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 Marzo 1922.

V. Volterra, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Sugli arseniati di anilina.* Nota del Socio E. Paternò.

L'arseniato di anilina fu preparato la prima volta da Béchamp e descritto come una sostanza cristallizzata che fonde a 140° e che corrisponde alla formola del biarseniato

$$AsO_4H_3 \,.\, 2C_6H_5NH_2 (AsO_5 2 \,.\, C_{12}H_7N \,.\, 3HO) .$$

Riscaldando questo sale a 180° il Béchamp ha osservato che distilla anilina e resta un residuo che ha sensibilmente la composizione di un arseniato acido

$$AsO_4H_3 \,.\, C_6H_5NH_2 (AsO_5C_{12}H_7N \,.\, 3HO) .$$

Avendo avuto occasione di preparare questi sali ho creduto non inutile studiarli meglio.

E poichè dagli studî di Béchamp risulta la esistenza di un arseniato bianilico, che riscaldato a 180° perde anilina, e si trasforma in un sale non definito della composizione sensibilmente corrispondente a quello mono anilico, ho voluto prima di ogni altro vedere se era possibile ottenere i tre arseniati prevedibili, combinando cioè l'acido arsenico con una, due o tre molecole di anilina.

L'esperienza ha mostrato che qualunque sia il rapporto nel quale si fanno reagire a freddo ed in soluzione acquosa l'acido arsenico con l'anilina si ottiene sempre ed esclusivamente il sale bianilico fusibile, secondo

Béchamp, a 140°, restando libero l'eccesso di acido arsenico o l'eccesso di anilina.

Questo sale pochissimo solubile nell'acqua fredda, si scioglie molto bene nell'acqua bollente e nell'alcool e si ottiene in magnifiche e larghe lamine molto sottili perfettamente incolore e trasparenti, che si riferiscono per le proprietà ottiche al sistema trimetrico, ma che non è stato possibile di ottenere in cristalli misurabili.

Il sale cristallizzato dall'acqua non contiene acqua di cristallizzazione, ma resta sempre un poco umido ed attaccaticcio; non può disseccarsi nemmeno per riscaldamento; in un essicatore in presenza del cloruro di calcio alla temperatura ordinaria perde circa 0,5 %. Il miglior processo per disseccare questo sale è quello di lasciarlo alla temperatura ordinaria in un essiccatore in presenza di anilina di *recente distillata*. Gr. 2,5250 perdettero in queste condizioni in 12 ore circa 1 % di peso.

La determinazione dell'arsenico, fatta sopra campioni di differente preparazione e cristallizzati dall'alcool o dall'acqua ha dato in media

Arsenico 22,74

mentre si calcola

Arsenico . . . . 22,86.

Questo sale perde anilina assai più facilmente di quanto ha creduto il Béchamp (riscaldamento a 180°).

La sua soluzione acquosa in una corrente di vapor d'acqua perde lentamente, ma quasi completamente l'anilina. Bollito con benzolo o con etere, cede anilina a questi solventi. Gr. 50 del sale riscaldati in b. m. a ricadere con gr. 50 di benzolo, hanno ceduto a questo solvente in un ora circa gr. 8 di anilina. Risultato analogo si ottiene con l'etere.

In presenza di acido solforico in un essiccatore perde anilina alla temperatura ordinaria.

Riscaldato nel vuoto verso i 60° in un apparecchio a distillazione, perde subito molta anilina, poscia più lentamente, e si trasforma in una massa polverosa leggermente colorata in grigio-roseo, la quale alla sua volta riscaldata verso i 100° continua a perdere dell'anilina lentamente colorandosi in bruno.

Cessando lo scaldamento a 60° la quantità di anilina distillata corrisponde ad una molecola per una del sale.

Il prodotto di questo moderato riscaldamento è effettivamente l'arseniato monoanilico intravisto da Béchamp; esso è solubile nell'acqua anche fredda assai più di quello bianilico, e dall'acqua o dall'alcool cristallizza in prismi di lucentezza vitrea, anch'essi per i caratteri ottici riferibili al sistema triclino, e che fondono alla temperatura di 154°.

Questo sale abbandonato sotto una campana in presenza di anilina l'assorbe lentamente e si trasforma nel sale bianilico. La sua soluzione acquosa scioglie l'anilina e per svaporamento si ottiene il sale bianilico.

Di questo sale cristallizzato dall'acqua o dall'alcool fu determinato l'arsenico.

La media di parecchie analisi concordanti ha dato

Arsenico 31.84

mentre si calcola

Arsenico . . . . 31,91.

Uno studio particolare ho fatto sul punto di fusione di questi sali. Il monarseniato di anilina puro cristallizzato dall'alcool ha il punto di fusione determinato in tubetto chiusa a 154°, e fonde senza annerire. Dopo solidificato rifonde a qualche grado più basso.

Pel sale bianilico invece, fusibile secondo il Béchamp a 140°, abbiamo trovato dei punti di fusione assai variabili secondo i campioni e secondo il modo di operare: riscaldamento cioè più o meno lento, fusione in tubetto aperto o chiuso. Qualche volta si è ottenuto un punto di fusione vicino ai 150°.

Fondendo un miscuglio ben intimo dei due sali non abbiamo osservato un abbassamento nel punto di fusione, ma un comportamento come se si trattasse del medesimo corpo in maggior o minor grado di purezza.

Mettendo in relazione queste osservazioni col fatto che il sale bianilico perde tanto facilmente l'anilina, risulta evidente che l'anilina venendo in libertà, già prima che sia conseguita la temperatura di fusione, deve influire all'abbassamento del punto di fusione del composto, e che la temperatura osservata è quella di un miscuglio del sale bi, col sale monoanilico, bagnato di anilina libera, punto di fusione che deve essere perciò assai variabile. Cosicchè bisogna dedurre che di accertato non vi è che il punto di fusione dell'arseniato monoanilico (154°); quello del sale bianilico non è possibile fissarlo per la sua facile alterazione.

Dei due arseniati di anilina ho anche fatto la crioscopia in acqua. Ecco i risultati ottenuti.

Monoarseniato.

Percentuale	Abbass. term.	P. m.
1,12	0,19	109,0
3,82	0,57	124,0
6,60	0,96	127,2
8,79	1,25	130,1
12,52	1,67	138,7
18,05	2,30	145,2
22,30	2,30	—

Biarseniato.

Percentuale	Abbass. term.	P. m.
0,29	0,05	107,3
1,11	0,21	97,8
1,37	0,26	97,5
1,83	0,31	109,2
3,01	0,50	111,4
3,33	0,56	110,00
5,74	0,70	151,7

La prima cosa che si deduce da questi dati è che il monoarseniato di anilina è notevolmente più solubile nell'acqua del bi, questo ad una temperatura di — 0°,70 si scioglie nella proporzione del 5,74 % all' incirca, mentre del mono ad una temperatura più bassa (— 2°,30) se ne scioglie più del 18 %.

Inoltre il p. m. del mono, che oscilla fra 124,0 e 138,7 in media è 130; quello del bi fra 97,8 e 110 in media cioè 107. Ed essendo il p. m. del primo eguale a 225 e quello del secondo 308, se ne deduce che il primo si avvicina alla metà (112,5) il secondo ad un terzo (102,7). Questi dati confermano, che il sale monoanilico si idrolizza in due molecole, e quello bianilico in tre.

Occasionalmente a questi studî ho pure fatto la crioscopia delle soluzioni di anilina-acqua.

Anilina in acqua (costante 18).

Percentuale	Abbass. term.	P. m.
0,32	0,07	83,7
0,68	0,13	96,7
0,88	0,23	70.8
1,29	0,32	
1,89	0,39	74,6
2,23	0,46	89,7
2,75	0,52	89,9
3,19	0,58	97,8
3,76	0,66	101,7
4,21	0,66	—

P. m. dell'anilina 83.

Acqua in anilina. Ampola e Rimadori (Gazz. chim., t. XXVII, p. 35) che studiarono l'anilina come solvente in crioscopia, adoperarono anilina fondente a — 5,96 e ne fissarono la costante = 58,7; quella da me adoperata fondeva — 6°,35.

Concentrazione	Abbass. term.	P. m.
0,4825	1,41	20,09
0,8273	1,96	27,78
0,9845	2.52	22,93
1,230	3,16	22,84
1.487	3,49	25.02
1,761	3,94	26,24
2.020	4,42	26,82
2,285	4.73	28,35
2,535	5.08	29.30
2,792	5,43	30,18
3.042	5,44	—

Da questi dati, indipendentemente dallo studio del comportamento crioscopico dell'anilina nell'acqua e dell'acqua nell'anilina, possono dedursi delle considerazioni sulla solubilità reciproca di queste due sostanze. La massima solubilità dell'anilina nell'acqua a —0°,6 circa oscilla intorno al 3,7 %, e quella dell'acqua nell'anilina a —5°,4 intorno al 2,8 %.

Come è noto Alexejeff (Berichte, X, p. 708) aveva trovato che l'anilina e l'acqua si scioglievano reciprocamente, ma che i due liquidi non sono miscibili in tutte le proporzioni neanche a 150°. Secondo le sue determinazioni l'anilina è solubile nell'acqua (3,11 %) meno che non sia l'acqua nell'anilina (4,58 %) alla temperatura ordinaria (16-18), mentre dai dati sopra riportati risulta che a temperature sotto 0° l'anilina si scioglie nell'acqua, più che l'acqua nell'anilina; ma nel complesso il fenomeno resta sempre dello stesso ordine. Del resto nè le esperienze delle quali ho reso conto, nè quelle di Alexejeff hanno la pretesa di essere esperienze di precisione.

Occasionalmente a questi studî ho voluto anche esaminare come procede l'assorbimento reciproco dell'acqua e dell'anilina, usando un apparecchio da me adoperato parecchi anni addietro per taluni studî che furono interrotti dalla guerra. L'anilina e l'acqua furono abbandonate per lungo tempo in due vasi comunicanti per la parte superiore, sino a tanto che l'anilina non aumentava più di peso. Gr. 8,3251 di anilina, ad una temperatura variabile ma che non superò mai i 30° in circa tre mesi, assorbirono gr. 0,3036 di acqua, ossia il 3,6 %, numero che tende a confermare che il 4,58 % trovato dall'Alexejeff è effettivamente elevato.

Meccanica celeste. — *Sopra l'integrabilità del problema dei due corpi di masse variabili.* Nota del Corrisp. G. ARMELLINI.

1. Il problema dei due corpi di masse variabili si sa fino ad ora integrare solo in un numero limitatissimo di casi. E precisamente, indicando con $M(t)$ la somma delle masse dei due corpi A e B, abbiamo:

α) Per l'attrazione Newtoniana i due casi in cui si abbia $M(t) = \frac{1}{a+bt}$ oppure $M(t) = \frac{1}{\sqrt{a+bt}}$ con a e b costanti. Sono dovuti entrambi al Mestschersky [1].

β) Per l'attrazione inversamente proporzionale alla quinta potenza delle distanze, il caso in cui si abbia $M(t) = a + bt$. Esso è dovuto [2] alla dott.ssa C. Maderni, già mia allieva nell'Università di Padova.

γ) Infine, supponendo $M(t) = (a+bt)^n$ e l'attrazione direttamente proporzionale alla potenza k delle distanze — caso che indicherò col simbolo $[k, n]$ — il problema è integrabile per $k + 2n + 3 = 0$. Questo caso è stato trattato dal Lovett in una nota inserita nel presente fascicolo e della quale ho avuto preventiva notizia dalla cortesia del Socio prof. Levi-Civita.

2. Ho colto quindi l'occasione per esporre all'Accademia un teorema da me trovato l'anno scorso, dal quale derivano come conseguenze i tre casi particolari α) β) γ) — cioè tutti quelli fino ad ora conosciuti — e dal quale risulta inoltre che il problema è integrale anche per

$$k + n + 3 = 0. \tag{1}$$

A tale scopo, ricordando che il moto relativo di A intorno a B è piano ed ha luogo con la legge delle aree, sceglieremo le unità fondamentali in modo che il coefficiente attrattivo f, la costante delle aree c ed il coefficiente C si riducano uguali all'unità ed adotteremo l'origine dei tempi in modo da avere $a = 0$. Con tali convenzioni, le equazioni del moto relativo di A intorno a B si scriveranno in coordinate polari

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r^3} - r^k t^n \tag{2}$$

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 1 \tag{3}$$

(1) Cfr. *Astr. Nachr*, n. 3153.

(2) Cfr. questi Rendiconti, 1921, semestre 2°, fasc. 5°.

ed è evidente che integrata la (2), la (3) si riduce immediatamente alle quadrature. Osserveremo poi che la (2) ammette un moltiplicatore Jacobiano uguale all'unità; basterebbe quindi conoscere un integrale primo $F\left(r, t, \frac{dr}{dt}\right) = \text{cost.}$ od un secondo moltiplicatore per avere la soluzione generale del problema.

3. Ciò posto dimostreremo il seguente

Teorema. — *Il caso $[k, n]$ è coniugato al caso $[k, -(k+n+3)]$ nel senso cioè che integrato uno qualsiasi di essi risulta immediatamente integrato anche l'altro.*

Dimostrazione. — Posto $t = \frac{1}{\tau}$ abbiamo

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\tau^2}\tau^4 + 2\tau^3\frac{dr}{d\tau} \tag{4}$$

e quindi la (2) diviene

$$\tau\frac{d^2r}{d\tau^2} + 2\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{r^3\tau^3} - r^k\tau^{-(n+3)}. \tag{5}$$

Ma il primo membro della (5) è identicamente uguale a $\frac{d^2(r\tau)}{d\tau^2}$; ponendo dunque $r\tau = R$ avremo:

$$\frac{d^2R}{d\tau^2} = \frac{1}{R^3} - R^k\tau^{-(k+n+3)}. \tag{6}$$

Se invece si operasse sulla (2) con la sostituzione $\tau_1 = \frac{1}{\alpha^2 t}$ ed $R_1 = \alpha r\tau_1$ essendo α una costante arbitraria, essa diverrebbe

$$\frac{d^2R_1}{d\tau_1^2} = \frac{1}{R_1^3} - \frac{R_1^k\tau_1^{-(k+n+3)}}{\alpha^{k+2n+3}}. \tag{6bis}$$

Ora è evidente che se immaginiamo integrata la (2) e trovato $r = f(t)$, risulterà dai calcoli fatti

$$R = \tau f\left(\frac{1}{\tau}\right) \tag{7}$$

e quindi anche la (6) si potrà considerare come è integrata. Viceversa risoluta la (6) e trovato $R = \varphi(\tau)$, il passaggio inverso ci darà r in funzione di t. Ma interpretando R come raggio vettore e τ come un tempo, la (6) è l'equazione del problema nel caso $[k, -(k+n+3)]$, dunque ecc.

4. *Corollari. I caso d'integrabilità.* — La (6) si riduce evidentemente alle quadrature, quando in essa non comparisce esplicitamente τ; ne concludiamo dunque che il problema è risolubile per

$$k + n + 3 = 0. \tag{8}$$

Eseguendo i calcoli troviamo

$$(9) \quad r = Rt \qquad (10) \quad \frac{1}{t} = \sqrt{1+k}\int \frac{R\,dR}{\sqrt{C_1R^2 - 2R^{k+3} - (k+1)}} + C_2$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie. Eliminando R tra la (9) e la (10) si ha la soluzione cercata $r = f(t)$.

Questo semplice risultato, non ancora messo in luce da altri, racchiude come caso particolare il 1° teorema del Mestschersky (legge Newtoniana ed $\left. M(t) = \frac{1}{a+bt}\right)$ che ha luogo per $k = -2$ ed $n = -1$.

5. *Casi coniugati coincidenti. II caso d'integrabilità.* — Come mostra il teorema ora dato, i casi $[k, n]$ sono coniugati due a due dal punto di vista della loro integrabilità; ed è facile anzi di vedere che questo legame è *involutorio*. Infatti partendo, per esempio, dal caso finale C_2 cioè $[k, -(k+n+3)]$ ed operando come si è fatto si ritrova come coniugato il caso iniziale C_1 cioè $[k, n]$.

In generale i due coniugati C_1 e C_2 sono distinti tra loro tranne se si abbia $n = -(k+n+3)$, cioè

$$(11) \qquad k + 2n + 3 = 0.$$

Anche in questo caso il problema è integrabile e noi possiamo vederlo nel modo più semplice osservando che nella ipotesi (11) l'equazione (2) diviene omogenea se si suppone che r sia di grado $\frac{1}{2}$ rispetto a t. È questo, in sostanza, il metodo seguito dal Lovett il quale nella sua Nota, indipendentemente dalla teoria ora svolta, pone $t = e^{2\lambda}$ ed $r = e^{\lambda} z$ e mostra che la (2) si riconduce alle quadrature se la (11) è verificata.

Dal nostro punto di vista si può però anche osservare che nella ipotesi (11) la (2) coincide con la (6^{bis}), cioè resta invariata per una sostituzione della forma $\tau_1 = \frac{1}{\alpha^2 t}$ ed $R_1 = \alpha r \tau_1$ qualunque sia la costante α. Ciò appunto rende ragione della facile integrabilità della (2) nel caso (11) e dà un notevole significato analitico al teorema del Lovett.

Potremo anzi valerci di tale osservazione per trovare una elegante proprietà dell'integrale.

Supponiamo a tale scopo che $r = \psi(t)$ sia una soluzione della (2); i passaggi fatti ci mostrano allora che $R_1 = \alpha \tau_1 \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 \tau_1}\right)$ sarà soluzione della

(6^{bis}). Ma nel caso (11) la (6^{bis}) coincide con la (2); dunque $r = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ sarà soluzione della (2).

Cioè nell'ipotesi (11) *se* $r = \psi(t)$ *è un integrale, anche* $r = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ *sarà un integrale qualunque sia la costante arbitraria* α.

Sarebbe poi facile di vedere che nel caso (11) si ha sempre come integrale particolare

$$r = s\sqrt{t} \tag{12}$$

essendo s radice dell'equazione

$$4\,s^{k+3} - s^2 - 4 = 0\,. \tag{13}$$

Per $r = s\sqrt{t}$ si ha identicamente $\psi(t) = \alpha t \psi\left(\frac{1}{\alpha^2 t}\right)$ qualunque sia α.

Sarà inutile aggiungere che nell'ipotesi (11) rientrano in particolare il 2° teorema del Mestschersky $\left(\text{per } k = -2 \text{ ed } n = -\frac{1}{2}\right)$ e quello della Maderni (per $k = -5$ ed $n = 1$).

6. Terminando potremo riassumere i risultati della presente Nota affermando che il problema è finora *integrabile soltanto nei casi il cui coniugato è a masse costanti* ($k + n + 3 = 0$) *oppure nei casi che coincidono col proprio coniugato* ($k + 2n + 3 = 0$).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Relatività. — *Lo spazio-tempo delle orbite kepleriane e delle orbite einsteiniane.* Nota III di F. P. Cantelli, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

In questa Nota cerco di rendermi conto delle orbite einsteiniane e dello spazio-tempo che ad esse si riferisce, prescindendo da ogni considerazione di equazioni gravitazionali.

1. Ricordiamo [1] che la metrica dello spazio-tempo delle orbite kepleriane è assegnata da

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)(dr^2 + r^2\,d\varphi^2 - c^2\,dt^2)\,. \tag{1}$$

Alla determinazione di (1) si perviene ammettendo, in primo luogo, che l'orbita descritta da un punto materiale intorno al Sole sia rappresentata dall'equazione, espressione formale della prima legge di Kepler,

[1] Cfr. questi Rendiconti, 1° sem. 1922, fasc. 1°, pag. 18 e fasc. 3°, pag. 92.

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\text{cost.}=A\ ,\quad u=\frac{1}{r}\tag{2}$$

e, in secondo luogo, ammettendo che valga l'espressione formale della seconda legge di Kepler

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\text{cost.}=C\,.\tag{3}$$

Si è anche detto che lo spazio-tempo (1) non conduce ad alcuna deflessione di un raggio luminoso nel campo gravitazionale solare, deflessione che, come è noto, dovrebbe aver luogo anche in base al semplice postulato di proporzionalità tra massa ed energia, pur giustificato da considerazioni tratte da Einstein dalla teoria della relatività della prima maniera o in senso stretto. Una deflessione dei raggi luminosi nel campo gravitazionale solare dovrebbe potersi dedurre dallo spazio-tempo generato dal Sole quando si identificassero, come riesce spontaneo ad ammettere. le geodetiche di lunghezza nulla ($ds=0$) con le traiettorie dei raggi luminosi stessi.

Lo spazio-tempo (1) non riesce perciò soddisfacente, ma il difetto che comporta può dipendere dal fatto che esso presume, nel sistema di coordinate r, φ, t, adottato per la descrizione dell'intero sistema solare, la validità rigorosa delle prime due leggi di Kepler le quali, nel sistema indicato di coordinate, potrebbero avere un valore di semplice approssimazione. Sembra più corretto, allo scopo di ulteriori considerazioni, cercare di dedurre l'equazione dell'orbita, descritta da un punto materiale, dall'espressione generale del ds^2 che è atto a rappresentare la metrica dello spazio-tempo generato dal Sole.

2. Si è accennato che ragioni di simmetria portano a scrivere che la metrica dello spazio-tempo tridimensionale, che occorre considerare, debba essere assegnata da una espressione della forma

$$ds^2=-e^{\lambda}\,dr^2-e^{\mu}\,r^2\,d\varphi^2+c^2\,e^{\nu}\,dt^2\,,\tag{4}$$

in cui λ, μ, ν sono tre funzioni della sola r soddisfacenti alla condizione $\lim_{r\to\infty}\lambda=\lim\mu=\lim\nu=0$.

Si è anche detto che da (4) si deduce

$$r^2\frac{d\varphi}{ds}=he^{-\mu}\ ,\quad \frac{dt}{ds}=\frac{k}{c^2}\,e^{-\nu}\ ,\quad r^2\frac{d\varphi}{dt}=\frac{hc^2}{k}\,e^{\nu-\mu}\,,\tag{5}$$

essendo h, k due costanti di integrazione, e l'equazione dell'orbita, descritta da un punto materiale intorno al Sole,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+e^{\mu-\lambda}\cdot u+\frac{1}{2}\frac{de^{\mu-\lambda}}{du}\cdot u^2=\frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2h^2}\frac{de^{2\mu-(\nu+\lambda)}}{du}-\frac{1}{2h^2}\frac{de^{2\mu-\lambda}}{du}\,.\tag{6}$$

Ora lo spazio-tempo (4) non solo deve diventare euclideo a distanza infinita dal Sole, ma deve essere quasi euclideo anche a breve distanza dalla superficie del Sole; pertanto, sembra *a priori* giustificabile che si ponga nella (6)

$$(7) \qquad e^{2\mu-(\nu+\lambda)} = 1 + \alpha u \, , \quad e^{2\mu-\lambda} = 1 + \beta u \, , \quad e^{\mu-\lambda} = 1 + \gamma u \, ,$$

essendo α, β, γ tre costanti da determinare, ovviamente indipendenti da h, k.

In conclusione, invece dello spazio-tempo (1) e dell'equazione dell'orbita (2), considereremo lo spazio-tempo e l'equazione dell'orbita che forniscono le (4), (6), tenendo presenti le (7).

Risulta, tenendo anche conto delle (5),

$$(8) \qquad ds^2 = -\frac{1+\beta u}{(1+\gamma u)^2} dr^2 - \frac{1+\beta u}{1+\gamma u} r^2 d\varphi^2 + c^2 \frac{1+\beta u}{1+\alpha u} dt^2 \, .$$

$$(9) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h \frac{1+\gamma u}{1+\beta u} \, , \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2} \frac{1+\alpha u}{1+\beta u} \, , \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k} \frac{1+\gamma u}{1+\alpha u} \, .$$

$$(10) \qquad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2} \gamma u^2 = \frac{1}{2h^2} \left(\frac{k^2 \alpha}{c^2} - \beta \right) .$$

Si noti che per $\gamma = 0$ si ricade nei casi esaminati nella precedente Nota e che, in particolare, per $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = -2m = -$ Km. 2,94 si ha lo spazio-tempo (1) delle orbite kepleriane.

Veniamo alla determinazione delle costanti α, β, γ dello spazio-tempo (8). Possono farsi diverse determinazioni di queste costanti, ma soltanto le due di cui appresso si fa cenno si presentano spontanee, senza artificî. Altre determinazioni non mi appariscono giustificabili o soddisfacenti quand'anche le conseguenze di esse non possano dirsi contraddette dalle osservazioni.

3. Allo spazio-tempo (8) corrisponde l'equazione dell'orbita (10). Ora le osservazioni suggeriscono che, a sufficiente distanza dal Sole, il moto debba potersi ritenere kepleriano. È spontaneo allora ammettere che, quando si prescinda, nella (10), dal termine di valore piccolissimo $3/2\, \gamma u^2$, e quindi quando anche si ponga $\gamma = 0$, la (8) debba fornire lo spazio-tempo delle orbite kepleriane (1); poniamo, dunque, nella (8), $\alpha = 0$, $\beta = -2m$ perchè, allora, per $\gamma = 0$, risulta *esattamente* lo spazio-tempo (1) delle orbite kepleriane.

Avremo, in conseguenza, da considerare lo spazio-tempo

$$(11) \qquad ds^2 = -\frac{1-2mu}{(1+\gamma u)^2} dr^2 - \frac{1-2mu}{1+\gamma u} r^2 d\varphi^2 + c^2 (1-2mu)\, dt^2$$

cui corrisponde l'orbita di equazione

$$(12) \qquad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2} \gamma u^2 = \frac{m}{h^2} \, .$$

Si tratta di determinare l'ultima delle costanti, la γ. Si è già accennato che il semplice postulato di proporzionalità tra massa ed energia porta come conseguenza una deflessione dei raggi luminosi nel campo gravitazionale solare. In particolare, un raggio stellare, passando rasente il bordo solare, dovrebbe subire una deflessione di circa 0″,87. Ora, perchè la (12) fornisca una tale deflessione ($ds = 0$, e quindi $h = \infty$), basta porre $\gamma = -m$: ma allora, dalla (12), si deduce pure uno spostamento secolare del perielio di Marte di circa 0″,7 e uno spostamento secolare del perielio di Mercurio di circa 21″, quando, effettivamente, l'astronomia attribuisce circa 5″ di spostamento al perielio di Marte e circa 42″ a quello di Mercurio. Se, dalla (12), si vuole dedurre uno spostamento di circa 42″ del perielio di Mercurio, basta porre $\gamma = -2m$. Allora la (12) stessa fornisce, per un raggio stellare che passi rasente il bordo solare, una deflessione di 1″,75. Per $\gamma = -2m$ le (11), (12) dànno lo spazio-tempo einsteiniano e l'orbita einsteiniana. Le (9) diventano

$$(13) \qquad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h \quad , \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}(1 - 2mu)^{-1} \quad , \quad r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k}(1 - 2mu)$$

l'ultima delle quali dice che, nel sistema di coordinate adottato r, φ, t, non è più valida la 2ª legge di Kepler. In altri termini, il passaggio dallo spazio-tempo kepleriano (1) a quello einsteiniano fa rinunziare, nel sistema di coordinate indicato, non solo alla prima ma anche alla seconda legge di Kepler.

4. Ritorniamo alla (8) per un'altra determinazione delle costanti α, β, γ. Stabiliamo, in primo luogo, di non rinunziare, nel sistema di coordinate adottato, alla 2ª legge di Kepler; per l'ultima delle (9) bisogna allora porre $\alpha = \gamma$. Stabiliamo ancora che dall'equazione dell'orbita (10), con $\alpha = \gamma$,

$$(14) \qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{3}{2}\alpha u^2 = \frac{1}{2h^2}\left(\frac{k^2\alpha}{c^2} - \beta\right) = \mathrm{A}$$

debba dedursi uno spostamento di circa 42″ del perielio di Mercurio. Poichè il moto deve riuscire quasi kepleriano, il valore del termine $\frac{3}{2}\alpha u^2$ dovrà riuscire trascurabile rispetto ad A. Integrando la (14) per approssimazioni successive $\Big($è ovvio che, quando si trascuri il termine $\frac{3}{2}\alpha u^2$, risulta in prima approssimazione $u = \mathrm{A}\,[1 + e\cos(\varphi - \omega)] = \frac{1}{a(1 - e^2)}\,[1 + e\cos(\varphi - \omega)]\Big)$ si deduce che perchè la (14) fornisca lo spostamento richiesto del perielio di Mercurio, basta porre $\alpha = -2m$. Le (8), (9) e (10) diventano, per $\alpha = \gamma = -2m$:

$$(15)\qquad ds^2 = -\frac{1+\beta u}{(1-2mu)^2}\,dr^2 - \frac{1+\beta u}{1-2mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1+\beta u}{1-2mu}\,dt^2\,,$$

$$(16)\qquad r^2\frac{d\varphi}{ds} = h\,\frac{1-2mu}{1+\beta u}\,,\quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{c^2}\,\frac{1-2mu}{1+\beta u}\,,\quad r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{hc^2}{k}\,,$$

$$(17)\qquad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - 3mu^2 = \frac{1}{2h^2}\left(-\beta - \frac{k^2}{c^2}\,2m\right),$$

e dovremo determinare la costante β. Poichè a sufficiente distanza dal Sole, l'orbita descritta da un punto materiale deve risultare quasi kepleriana, il secondo membro della (17) deve risultare, tenuto presente quanto si è detto a proposito delle (11), (12), pressochè eguale a $\frac{m}{h^2}$. Ora, quando si elimini ds tra la penultima delle (16) e la (15) si ricava che, per il moto dei pianeti, è approssimativamente $\frac{k^2}{c^2} = 1$; ne segue che dovrà porsi $\beta = -4m$. Risulta dunque lo spazio-tempo

$$(18)\qquad ds^2 = -\frac{1-4mu}{(1-2mu)^2}\,dr^2 - \frac{1-4mu}{1-2mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1-4mu}{1-2mu}\,dt^2$$

dal quale si deduce: che per il moto di un punto materiale intorno al Sole vale, nel sistema di coordinate r, φ, t, la seconda legge di Kepler; che si ha uno spostamento secolare del perielio di Mercurio di circa 42″; che un raggio stellare, passando rasente il bordo solare, subisce una deflessione, non di 1″,75 ma di 0″,87.

Le osservazioni fatte sulla deflessione del raggio stellare, in occasione dell'ecclisse solare del 29 maggio 1919, conducono ad ammettere che essa debba essere dell'ordine di grandezza indicato da Einstein (1″,75), ma è noto che altre osservazioni saranno eseguite in proposito.

Dallo spazio-tempo (18) si deduce pure una influenza del campo gravitazionale sulla frequenza delle vibrazioni di un atomo, in una misura praticamente eguale a quella che si deduce dallo spazio-tempo einsteiniano.

5. Le determinazioni fatte delle costanti α, β, γ, nei casi precedentemente esaminati, dipendono dalla preferenza data allo spostamento del perielio di Mercurio in confronto a quello di Marte. Sono note le ragioni per cui non vengono presi in considerazione gli spostamenti dei perieli degli altri pianeti.

È chiaro che se si desse la preferenza allo spostamento del perielio di Marte, si otterrebbero risultati del tutto diversi. Così, perchè lo spazio-tempo (11) fornisca lo spostamento di circa 5″ indicato, basta porre $\gamma = -8m$ ma si deduce allora uno spostamento del perielio di Mercurio quadruplo di

quello che effettivamente si attribuisce al detto pianeta e una deflessione di un raggio stellare, che passi rasente il bordo solare, quadrupla di quella einsteiniana. Così, anche per il secondo caso considerato, quando si voglia dedurre lo spostamento di circa 5″ del perielio di Marte, si perviene allo spazio-tempo

$$(19)\quad ds^2 = -\frac{1-10\,mu}{(1-8\,mu)^2}\,dr^2 - \frac{1-10\,mu}{1-8\,mu}\,r^2\,d\varphi^2 + c^2\,\frac{1-10\,mu}{1-8\,mu}\,dt^2$$

dal quale si ricava ancora uno spostamento del perielio di Mercurio quadruplo di quello effettivamente attribuito al detto pianeta e una deflessione di un raggio stellare, rasente il bordo solare, doppia di quella einsteiniana.

Ora è inammissibile che simili risultati possano rispondere alla realtà e pertanto non potrebbe restare *a priori* giustificata una preferenza allo spostamento del perielio attribuito a Marte in confronto a quello attribuito a Mercurio, ma tutto quanto è stato detto in questa Nota, e nella precedente, ribadisce che spetta ancora alle osservazioni di decidere sulla plausibilità dello spazio-tempo einsteiniano (11), $[\gamma = -2m]$, e quindi sulla portata delle equazioni gravitazionali nella forma prescelta da Einstein.

Meccanica — *Sul problema dei due corpi di massa variabile.* Nota di E. O. LOVETT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota interessante [1], presentata a questa Accademia il 2 maggio 1921 (che solo recentemente potei leggere nel corrispondente fascicolo dei Rendiconti) la Sig.na dott. Carla Maderni ha integrato le equazioni differenziali del problema dei due corpi di massa variabile, nell'ipotesi che la massa sia una funzione lineare del tempo e che l'attrazione varii in ragione inversa della quinta potenza della distanza.

Dalla lettura di questa Nota sono stato condotto ad un tipo di problema dei due corpi, più generale, in cui le equazioni differenziali del moto sono ancora riducibili alle quadrature.

Questo tipo include, come caso particolare, il problema dei due corpi di massa variabile, in cui la massa varia come la p^{esima} potenza del tempo e la forza (attrattiva o repulsiva) come la q^{esima} potenza della distanza, p e q essendo due numeri quali si vogliono legati dalla relazione

$$2p + q + 3 = 0\,.$$

Ritengo che questo sia un nuovo caso di integrabilità, in cui è in particolare compreso ($p = 1$, $q = -5$) quello segnalato dalla Sig.na Maderni nella Nota citata.

[1] *Un nuovo caso di integrabilità nel problema dei due corpi di massa variabile.*

Si consideri il moto (relativo) di due corpi soggetti a mutue azioni attrattive o repulsive, quale rimane definito (colle solite notazioni) dal sistema differenziale

$$(1) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c \;,\; r^3 \frac{d^2 r}{dt^2} + \varphi\left(\frac{r^2}{t}\right) = 0 :$$

con φ si rappresenta una funzione, del resto arbitraria, in cui, per semplicità di scrittura, si è conglobato il quadrato della costante delle aree. Le unità si sono scelte in guisa da rendere eguale ad 1 la costante gravitazionale: volendo, si potrebbe supporre $= 1$ anche la costante delle aree c.

Il sistema (1) è integrabile per quadrature in quanto, nella seconda equazione, si possono separare le variabili mediante la sostituzione

$$(2) \qquad r = e^{\lambda} z \quad , \quad t = e^{2\lambda} ,$$

e designando al solito la base dei logaritmi naturali.

Infatti, ove si derivi r rapporto a t, prima una e poi una seconda volta, tenendo conto che z va risguardata come funzione di λ, si ottiene

$$(3) \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}(z + z') ,$$

$$(4) \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{4} e^{-3\lambda}(z'' - z) ,$$

in cui z' e z'' rappresentano le derivate prima e seconda di z rispetto a λ. Sostituendo, nella seconda delle (1), a $\frac{d^2 r}{dt^2}$ il suo valore (4), abbiamo, badando alla seconda delle (2),

$$(5) \qquad z'' = z - 4\varphi(z^2)\, z^{-3} .$$

Questa equazione di secondo ordine in z è di forma integrabile, e una prima integrazione porge

$$(6) \qquad z'^2 = z^2 - 8 \int \varphi(z^2)\, z^{-3}\, dz + h ,$$

dove h è una costante additiva arbitraria, proveniente dall'integrazione.

Per fare qualche applicazione della (6) a casi particolari, giova trasformare alquanto il secondo membro, eseguendo nell'integrale una integrazione per parti. Si può così attribuire alla (6) la forma

$$(7) \qquad z'^2 = z^2 + 4\varphi(z^2)\, z^{-2} - 8 \int \varphi'(z^2)\, z^{-1}\, dz + h ,$$

dove φ' rappresenta la derivata di φ rispetto all'argomento z^2. Questa forma (7) ha altresì il vantaggio di mettere in evidenza il termine corrispondente a $\frac{c^2}{r^2}$ il quale, nell'equazione originaria (1), si trovava assorbito nella funzione arbitraria φ. Da (6) o da (7) si ricava, con un'ulteriore quadratura, l'espressione di λ sotto la forma

$$(8) \qquad \lambda = \int \frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} + k,$$

dove k è la costante arbitraria introdotta dall'integrazione.

Determinata così λ come funzione di z, le equazioni (2) dànno immediatamente r quale funzione di t, e la prima delle (1) ci fornisce, con un'altra quadratura, anche θ in funzione di t. Rimanendo pertanto espresse sia r che θ, in funzione di t, risulta completamente determinato il moto definito dall'originario sistema differenziale (1).

Terminerò considerando quel caso speciale del problema in questione, in cui la funzione arbitraria φ ha la forma

$$(9) \qquad \varphi = \sum_i \varphi_i\left(\frac{r^2}{t}\right)\left(\frac{t}{r^2}\right)^i,$$

rappresentando a lor volta le φ_i funzioni arbitrarie dell'argomento indicato e il sommatorio essendo esteso a un numero finito qualsiasi di valori di i.

Le equazioni differenziali (1) divengono in conformità

$$(10) \qquad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c\,, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -\sum_i \varphi_i\left(\frac{r^2}{t}\right) t^i\, r^{-(2i+3)},$$

e la corrispondente soluzione si ricava dalla (7) sotto la forma

$$(11) \qquad z'^2 = z^2 + \sum_i a_i \left[\varphi_i(z^2)\, z^{-2(i+1)} - 2\int \varphi_i'(z^2)\, z^{-2i+1}\, dz\right] + h,$$

in cui le costanti a_i sono definite dalle posizioni

$$(12) \qquad (i+1)\, a_i = 4\,.$$

In particolare, se tutte le φ_i sono costanti, diciamo, per esempio,

$$(13) \qquad \varphi_i = b_i\,,$$

scompaiono dalla (11) le quadrature non effettuate, e l'integrale assume lo aspetto semplice

$$(14) \qquad z'^2 = z^2 + \sum_i c_i\, z^{-2(i+1)} + 4h\,,$$

in cui, per convenienza formale che apparirà tra un momento, si è scritto $4h$ in luogo di h, ponendo altresì

$$c_i = a_i b_i . \tag{15}$$

Dalla (14), mercè l'ulteriore sostituzione

$$z^2 = \frac{1}{u}, \tag{16}$$

si ricava, per il caso di cui ci occupiamo, l'integrale (8) sotto la forma particolare

$$\lambda = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u \sqrt{\Sigma_i c_i u^{i+2} + 4hu + 1}} + k . \tag{17}$$

Se poi tutte le costanti b si suppongono nulle, salvo due, diciamo b_0 e b_p alle quali si attribuiscano i valori

$$b_0 = -1 \quad , \quad b_p = 1 , \tag{18}$$

l'integrale (17), in virtù delle definizioni (12) e (15), diviene

$$\lambda = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u \sqrt{a_p u^{p+2} - 4u^2 + 4hu + 1}} + k . \tag{19}$$

Quest'ultimo integrale (19) risolve il problema dei due corpi di massa variabile, quando la massa varia come la p^{esima} potenza del tempo e la forza come la potenza q^{esima} della distanza, p e q rappresentando due numeri qualsivogliono legati dalla relazione lineare

$$2p + q + 3 = 0 . \tag{20}$$

È questo un caso abbastanza generale di integrabilità, che credo nuovo.

Supponiamo da ultimo $p = 1$ e osserviamo che, a norma della (12), $a_1 = 2$. Si ha in tal caso, dalla (19), l'integrale

$$\lambda = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u \sqrt{2u^3 - 4u^2 + 4hu + 1}} + k , \tag{21}$$

il quale, moltiplicando per 2 (chè tale è il rapporto fra il λ usato dalla Sig.na Maderni e il mio), ovvero, ciò che è lo stesso, aggiungendo il fattore $\frac{1}{4}$ sotto il segno di radice, diviene identico al nuovo integrale assegnato dalla Sig.na Maderni, il cui scritto diede origine alla presente ricerca.

Fisica matematica. — *Capacità del condensatore a piatti infinitamente sottile.* Nota di Rocco Serini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In due Note [1] ho ridotto il problema della distribuzione elettrica sopra il condensatore a piatti circolari alla risoluzione di due equazioni integrali. Ma i miei sforzi per dedurre nel caso generale l'elemento veramente importante, la capacità, non ebbero finora successo. Invece se si considera un condensatore ∞^{te} sottile rispetto al raggio dei piatti, è possibile dedurre, come mostro in questa Nota, che la capacità è data dalla formula $A+\frac{B}{l}$ dove A e B sono costanti e l la distanza dei due piatti: e precisamente è $A=\frac{a}{\pi}$ (a raggio dei piatti) e B dovrà dedursi sperimentalmente.

1. *Richiamo di risultati precedenti.* — Dette φ_1, φ_2 le due funzioni potenziali che sui piatti prendono rispettivamente valori $(+1, -1)$ $(+1, +1)$ esse si possono mettere sotto la forma

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_0^\infty \left(e^{\mp\left(z-\frac{l}{2}\right)s} - e^{\mp\left(z+\frac{l}{2}\right)s}\right) I_0(rs)\,\psi_1(s)\,ds\,,\\ \varphi_2 &= \int_0^\infty \left(e^{\mp\left(z-\frac{l}{2}\right)s} - e^{\mp\left(z+\frac{l}{2}\right)s}\right) I_0(rs)\,\psi_2(s)\,ds\,,\end{aligned}\right.$$

e nel caso del condensatore ∞^{te} sottile si ha [2ª Nota (17) (18)].

$$(2)\qquad \psi_1(s)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen} a s}{s(1-e^{-ls})}\,,\quad \psi_2(s)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen} a s}{s(1+e^{-ls})}\,.$$

Ciò posto è facile dedurre l'espressione delle quantità di elettricità che si hanno sui due piatti. Siano queste e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} il primo indice riferendosi alle φ_1, φ_2 il secondo ai due piatti superiore ed inferiore.

Basta tener conto dei risultati del Beltrami [2] e si avrà coi dati (1) (2)

$$e_{11}=-e_{12}=-\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty I_0'(as)\,\frac{\operatorname{sen} a s}{s(1-e^{-ls})}\,ds\,,$$

$$e_{21}=e_{22}=-\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty I_0'(as)\,\frac{\operatorname{sen} a s}{s(1+e^{-ls})}\,ds\,.$$

(1) *Teoria del condensatore elettrico a piatti circolari.* R. Acc. Lincei, luglio-ottobre 1920.

(2) *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche.* Par. 2, Acc. Bologna, 1881, oppure Opere, T. III.

Facendo le sostituzioni $as = x$, $\frac{l}{a} = h$ e ricordando che $I'_0(x) = -I_1(x)$ ($I_1(x)$ funzione di Bessel di 1ª specie e d'ordine uno) si ha in definitiva

$$(3) \quad \begin{cases} e_{11} = -e_{12} = \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1-e^{-hx})}\,dx\,, \\ e_{21} = e_{22} = \dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1+e^{-hx})}\,dx\,. \end{cases}$$

1. *Riduzione ad una equazione funzionale.* — Gli integrali che compaiono nelle (3) non si sanno calcolare. Osserviamo però che

$$e_{11} + e_{21} = \frac{4a}{\pi}\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x(1-e^{-2hx})}\,dx\,,$$

e mettendo quindi in evidenza che le e sono funzioni sulla sola h,

$$(4) \qquad e_{11}(h) + e_{21}(h) = 2\,e_{11}(2h)\,.$$

Se per $e_{21}(h)$ che è funzione regolare per $h = 0$ sostituiamo, essendo $h = \frac{l}{a}$ infinitesimo, il primo termine del suo sviluppo, avremo

$$(5) \qquad e_{21}(h) = e_{21}(0) = \frac{a}{\pi}\int_0^\infty I_1(x)\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{a}{\pi}\,,$$

perchè l' $\int$ vale 1 (¹). L'equazione funzionale (4) diventa

$$(4') \qquad e_{11}(h) + \frac{a}{\pi} = 2e_{11}(2h)\,.$$

Si può dimostrare che questa ha per soluzione generale la soluzione evidente

$$(5') \qquad e_{11}(h) = \frac{a}{\pi} + \frac{B'}{h}\,,$$

dove B′ è una costante.

3. *Capacità del condensatore.* — Colle formole (5) (5′) il problema della capacità è completamente risolto, cioè sono determinati i coefficienti nelle formole che legano potenziali e cariche. Se intendiamo come capacità, in una accezione più ristretta, la carica che si ha sopra uno dei piatti a potenziale 1 quando l'altro sia a potenziale *zero*, il calcolo può essere condotto in modo breve così. Ricordiamo che se φ_1, φ_2 sono i potenziali di due conduttori con cariche C_1, C_2 e $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ i potenziali degli stessi con cariche $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ si ha

$$\varphi_1\, C_1^{(1)} + \varphi_2\, C_2^{(1)} = \varphi_1^{(1)}\, C_1 + \varphi_2^{(1)}\, C_2 \ (^2)\,.$$

(¹) V. p. Schaftlein, *Bessellschen Functionen*, pag. 79.

(²) Vedi p. es. Kirchhoff, *Vorlesungen über Electricität und Magnetismus*, 7ª Lez. N. 4.

Poniamo allora $\varphi_1^{(1)} = 1$, $\varphi_2^{(1)} = 0$ e poi una prima volta

$$\varphi_1 = 1\,,\ \varphi_2 = -1 \text{ quindi } C_1 = -C_2 = e_{11}\,,$$

e un'altra volta

$$\varphi_1 = 1\,,\ \varphi_2 = 1 \text{ quindi } C_1 = C_2 = e_{21}\,.$$

Avremo allora dalla formola citata, per le (5) (5′),

$$C_1^{(1)} - C_2^{(1)} = e_{11}\,,$$
$$C_1^{(1)} + C_2^{(1)} = e_{21}\,,$$

quindi

$$C_1^{(1)} = \frac{1}{2}(e_{11} + e_{21}) = \frac{a}{\pi} + \frac{B'}{2h} = \frac{a}{\pi} + \frac{B}{l} \tag{6}$$

dove B è una costante (delle dimensioni di una superficie) che dovrà dedursi sperimentalmente.

Relatività. — *Correzione di una grave discrepanza tra la teoria delle masse elettromagnetiche e la teoria della relatività. Inerzia e peso dell'elettricità.* Nota I di Enrico Fermi, presentata dal Corrisp. G. Armellini.

§ 1. La teoria delle masse elettromagnetiche fu studiata per la prima volta da Max Abraham [1], prima della scoperta della teoria della relatività. Abraham considerò la massa di un sistema di cariche elettriche, rigido nel senso della meccanica classica, e trovò che nell'ipotesi che un tale sistema avesse simmetria sferica, la sua massa era variabile con la velocità, e precisamente eguale [2] a $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ (essendo u l'energia elettrostatica del sistema e c la velocità della luce), per velocità nulle o molto piccole, mentre per velocità v confrontabili con c intervenivano dei termini di correzione un po' complicati dell'ordine di grandezza di $v^2 : c^2$. Prima ancora della teoria della relatività Fitzgerald introdusse, come è noto, l'ipotesi che i corpi si

[1] M. Abraham, Theorie der Elektricität; Richardson, Elektron theory of Matter, cap. XI; Lorentz, The theory of elektrons, p. 37.

[2] Si dice ordinariamente che la massa elettromagnetica di uno strato sferico omogeneo di carica e, e di raggio r è $\frac{2}{3}\frac{e^2}{rc^2}$; se però si osserva che l'energia elettrostatica è $u = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r}$, si trova la massa $= \frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$.

contraessero nella direzione del loro moto, nel rapporto $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}:1$, e Lorentz rifece la teoria delle masse elettromagnetiche di Abraham, considerando naturalmente invece che sistemi di cariche elettriche rigidi nel senso della meccanica classica, dei sistemi che subissero tale contrazione. Il risultato fu che la massa di quiete, ossia il limite della massa per velocità nulle, restava $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$, mentre venivano alterati i termini correttivi dipendenti da $v^2:c^2$. Le esperienze di Kaufmann e Bucherer, sulla variabilità con la velocità della massa delle particelle β dei corpi radioattivi si decisero nettamente a favore della teoria di Lorentz, così detta dell'elettrone contrattile, contro quella di Abraham, dell'elettrone rigido.

Scoperta in seguito la teoria della relatività, questa portò alla conseguenza che tutte le masse, fossero esse o no elettromagnetiche, dovevano variare con la velocità come quella dell'elettrone contrattile di Lorentz; per modo che le esperienze di Kaufmann e Bucherer vennero a lasciare indecisa la natura totalmente elettromagnetica o no della massa elettronica, venendo a costituire esclusivamente una conferma della teoria della relatività. D'altra parte la stessa teoria della relatività condusse ad attribuire ad un sistema dotato dell'energia u la massa $\frac{u}{c^2}$; di modo che venne a sorgere una grave discrepanza con le teorie elettrodinamiche di Abraham e Lorentz, che attribuiscono ad una distribuzione sferica di elettricità la massa $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$.

Questa differenza tra la teoria elettrodinamica e quella relativistica mi si presentò stridente dopo due recenti Note [1], in una delle quali considerai le masse elettromagnetiche di sistemi a simmetria qualunque, trovando che sono in genere rappresentate da tensori anzichè da scalari, che si riducono naturalmente a $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ nel caso della simmetria sferica, nell'altra invece, partendo dalla teoria generale della relatività considerai il peso dei medesimi sistemi, che trovai in ogni caso eguale a $\frac{u}{c^2}G$, essendo G l'accelerazione di gravità.

Nel presente lavoro noi dimostreremo che la differenza tra i due valori della massa ottenuti nei due modi, ha origine in un concetto di corpo rigido in contraddizione con la teoria della relatività che si applica nella teoria elettrodinamica, anche in quella dell'elettrone contrattile di Lorentz, e che con-

[1] E. Fermi, N. Cim., VI, 22, pp. 176, 192; 1921.

duce alla massa $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$; mentre la nozione di corpo rigido più giustificata e conforme alla teoria della relatività conduce invece alla massa $=\frac{u}{c^2}$.

§ 2. Consideriamo dunque un sistema di cariche elettriche sostenuto da un dielettrico rigido che sotto l'azione di un campo elettromagnetico, in parte dovuto al sistema stesso, ed in parte a cause esterne, si muova di moto traslatorio descrivendo un tubo orario nello spazio-tempo (1). Vediamo con precisione che cosa debba intendersi per moto traslatorio rigido.

Consideriamo un qualunque sistema di riferimento di Lorentz-Einstein e supponiamo che per esso ad un certo istante un punto del sistema di cariche abbia velocità nulla: diremo che il moto è traslatorio se, con tali ipotesi, nello stesso riferimento, per quell'istante, tutti i punti del sistema hanno velocità nulla. Ciò equivale a dire che le linee orarie dei punti del nostro sistema sono traiettorie ortogonali di una famiglia di spazii lineari; ed infatti in un riferimento di Lorentz-Einstein in cui per spazio si prenda uno degli spazii della famiglia tutto il sistema è in quiete al tempo zero, poichè lo spazio taglia ortogonalmente tutte le linee orarie. Con questa definizione di moto traslatorio la rigidità del sistema viene espressa dal fatto che la sua figura in questi spazii perpendicolari al tubo resta invariabile: ossia che tutte le sezioni rette del tubo orario sono fra loro eguali.

Data la complicazione dei vincoli del nostro sistema (rigidità secondo la definizione precedente), lo tratteremo col principio di Hamilton.

Per poterlo applicare al caso nostro ci occorrerà dunque avere una variazione del moto del nostro sistema conforme ai vincoli del problema, ossia alla rigidità giustamente interpretata. Ora noi mostreremo che si giunge al valore $\frac{4}{3}\frac{u}{c^2}$ oppure a quello $\frac{u}{c^2}$ per la massa elettromagnetica secondo che per tale variazione si prende l'una o l'altra delle due che andiamo ad illustrare e che distinguiamo con le lettere A e B. La variazione A è però, come immediatamente si vedrà, da scartarsi, perchè in contraddizione col principio di relatività.

Sia T il tubo orario descritto dal sistema; nella figura lo spazio di riferimento x, y, z è rappresentato su una sola dimensione, dall'asse x ed al tempo t è sostituito $i\,c\,t$, per avere una metrica definita.

Variazione A: si considera come variazione soddisfacente il vincolo della rigidità uno spostamento infinitesimo, rigido nell'ordinario senso cinematico, parallelo allo spazio (x, y, z) di ogni sezione del tubo parallela allo

(1) In tutto il seguito si riguarda lo spazio-tempo come euclideo, poichè si intende che i campi elettromagnetici che in esso si considerano siano abbastanza poco intensi per non alterarne sensibilmente la struttura metrica.

spazio stesso. Nella figura otterremo dunque la variazione del nostro tubo orario spostando parallelamente all'asse x ogni sezione $t =$ costante del tubo di un segmento infinitesimo arbitrario. Se ci limitiamo alla considerazione di spostamenti traslatorii avremo dunque δx , δy , δz funzioni arbitrarie del solo tempo, e $\delta t = 0$.

Variazione B: si considera come variazione soddisfacente il vincolo della rigidità ogni spostamento infinitesimo perpendicolare al tubo di ogni sezione normale del tubo stesso, rigido nell'ordinario senso cinematico. Nella figura otterremo tale variazione spostando parallelamente a sè di un segmento arbitrario ogni sezione normale del tubo.

Biologia. — *Sulla biofotogenesi*. Nota preliminare di SILVIA MORTARA, presentata dal Corrisp. RAFFAELE.

A proposito della questione tanto dibattuta, intorno al modo di prodursi della luce negli animali, mi è occorso ultimamente di fare alcune interessanti osservazioni, sulle quali desidero richiamare l'attenzione degli studiosi, perchè credo che se ne potranno trarre delle conclusioni importanti, estendendo il campo delle ricerche.

Per continuare una serie già iniziata di studî sulla morfologia degli organi fotogeni di animali marini, ho avuto in esame da Messina un certo numero di esemplari in ghiaccio, che mi sono arrivati in perfetto stato di conservazione e di freschezza, tanto che ho pensato di approfittarne per fare qualche osservazione, che potesse aiutarmi a cercare una spiegazione della biofotogenesi. Secondo la teoria del Pierantoni, già accettata ed in parte confermata, a quanto pare, da autori stranieri; questo fenomeno dovrebbe ridursi semplicemente ad un caso di simbiosi endocellulare, per il quale la luminosità degli animali sarebbe dovuta soltanto alla attività di miriadi di bacteri fotogeni, annidati dentro le cellule della sostanza luminosa, e divenuti ormai simbionti necessarî dell'ospite, che li alberga e li trasmette di generazione in generazione.

Affrontando il problema sotto questo punto di vista, ho voluto tentare anch'io di coltivare i germi fotogeni, dagli animali avuti da Messina, ed ho potuto eseguire, nell'Istituto di Igiene della nostra Università, diretto dal prof. G. Sanarelli, e precisamente nel laboratorio del dott. V. Puntoni, professore incaricato di Batteriologia, una serie di ricerche, tendenti appunto a rivelare la origine bacterica della luce animale.

Ho avuto a mia disposizione piccoli *Crostacei*, *Pesci* (Argyropelecus, Stomias, ecc.) e *Cefalopodi* (varî esemplari di Heteroteuthis dispar); ma ho dovuto escludere subito le forme dei due primi gruppi, perchè i loro

piccoli organi fotogeni si prestano male ai prelevamenti dal loro interno, assolutamente garantiti contro eventuali contaminazioni. È infatti indispensabile che questa operazione sia eseguita con ogni precauzione, altrimenti non si può mai essere sicuri di avere estratto il contenuto dell'organo, puro dai germi viventi nell'ambiente esterno.

L'*Heteroteuthis dispar* si presta meravigliosamente bene allo scopo; è una piccola forma di Cefalopodo abissale (vivente presso a poco tra 1200 e 1500 metri), che arriva abbastanza di frequente alle nostre spiaggie e si raccoglie abbondantemente a Messina, in varî stadî di sviluppo. La lunghezza del mantello non supera negli adulti i 2 $^1/_2$-3 centimetri; ha forma piuttosto tozza, come tutti i *Sepiolidae*. Ogni individuo porta nella cavità palleale, addossato alla borsa del nero, un unico grande organo fotogeno impari, sferoidale, simile, per l'aspetto esterno, ad una grossa perla, il cui diametro supera spesso il $^1/_2$ centimetro, e può raggiungere talvolta perfino quasi 1 centimetro. Un organo gigantesco, dunque, che si isola facilmente, e si presta molto bene a qualsiasi indagine. La sua struttura, che qui non descriverò in particolare, è molto affine a quella degli organi fotogeni di *Sepiola* e *Rondeletia*, che sono appunto le due forme prese in esame dal Pierantoni (1), sulle quali si può dire fondata la sua teoria della simbiosi bacterica, almeno per quanto riguarda i Cefalopodi. Anche in *Heteroteuthis dispar* si trova un organo a tipo ghiandolare, i cui condotti sboccano verso l'esterno, per mezzo di due grossi pori. Nel lume di questi condotti ghiandolari, che formano col loro insieme la massa principale dell'organo, deve venire senza dubbio elaborata la sostanza fotogena, ed in essi appunto (a somiglianza di quanto ha trovato il Pierantoni) dovrebbero aver sede le miriadi di bacteri, produttori di luce.

Allo scopo di evitare qualsiasi causa di errore e per avere la assoluta certezza che, il materiale adoperato per le culture, fosse preso solo dal contenuto dell'organo fotogeno, questo è stato perfettamente isolato e poi sterilizzato, per un tratto della sua superficie, mediante una spatolina arroventata. Da questa superficie sterilizzata si è fatta penetrare, nell'interno dell'organo, la punta di una sottilissima pipetta Pasteur, sterile, e per mezzo di essa si è aspirato il contenuto dell'organo, procurando di pescare a diverse altezze e da ogni lato. Il materiale così ottenuto è stato seminato su tubi di agar al brodo di seppia, a becco di flauto, e poi messo a coltivare in stufa, a 20°. Dopo 24 ore non si aveva alcuno sviluppo, e, nei giorni successivi, i tubi, tenuti in osservazione, sono rimasti *assolutamente sterili*.

Per non affrettare le conclusioni abbiamo voluto ripetere l'esperienza su nuovo materiale di Messina, usando sempre le rigorose precauzioni di ste-

(1) Pierantoni U., *Gli organi simbiotici e la luminescenza bacterica nei Cefalopodi*. Pubbl. Staz. Zool., Napoli, vol. II, p. 105 [1918].

rilizzazione, descritte sopra. Il risultato delle culture è stato sempre negativo.

Preparati per strusciamento, fatti dal contenuto dell'organo fotogeno, e coloriti con Gram e con fucsina, non hanno rivelato la presenza di alcuna forma bacterica tipica e nemmeno di forme riportabili ad elementi microbici atipici, per degenerazione o adattamento.

Risultato negativo hanno dato anche le culture tentate strusciando sull'agar la superficie esterna dell'organo fotogeno.

Da un organo intero, pestato nel mortaio, per avere la certezza di provarne tutto il contenuto, non si è nemmeno potuto avere alcun bacterio fotogeno.

A controllo delle precedenti osservazioni, ho voluto eseguire un esame accurato su sezioni di organi conservati, di *Heteroteuthis dispar*, per tentare se fosse possibile rivelare, nei tagli, la presenza dei simbionti. Ma anche in questo caso la prova ha avuto risultato decisamente negativo. Non posso per ora nemmeno accennare alle particolarità strutturali di questi organi (1), sui quali mi riserbo di riferire più ampiamente in seguito, mi basta solo far noto qui che, tentando i metodi indicati dallo stesso Pierantoni (specialmente la colorazione col Giemsa), ed altri (ematossilina ferrica, fucsina, bleu di Loeffler ecc.), non mi è stato possibile in nessun caso di mettere in evidenza nel lume o dentro le cellule delle ghiandole, qualche formazione, che potesse far sospettare l'esistenza di germi simbiotici dentro questi organi.

Dopo queste osservazioni e sopratutto in base alle ripetute esperienze, di cui ho riferito sopra, credo di poter senz'altro concludere che: *l'organo fotogeno di Heteroteuthis dispar* (contrariamente a quanto sembrava ammettere implicitamente il Pierantoni) *non contiene alcun germe fotogeno nel suo interno*; così che non è assolutamente possibile ritenere dimostrata la necessità di una simbiosi bacterica, per la produzione della luce nei Cefalopodi.

Per contro, di fronte alle esperienze negative, che mi hanno portato a tali conclusioni, ho potuto notare, tenendo alcun tempo in osservazione una parte del materiale fresco avuto da Messina, che compariva al secondo e al terzo giorno una certa luminosità, in varî punti, sulla superficie del corpo di quasi tutti gli animali.

È noto che si ha spesso un grande sviluppo di bacteri fotogeni nella muscolatura e sulla pelle di animali morti da poco, prima che si inizino processi di putrefazione manifesta. Prendendo delle ansate di materiale dalla pelle degli animali, che tenevo in osservazione, o dall'acqua in cui erano conservati, e seminandole su piastre di agar di seppia, che mettevo a col-

(1) Per tale struttura confronta anche: Meyer Werner Th., *Ueber das Leuchtogen der Sepiolini*. P. II, in Zool. Anz., Bd. 32 [1907].

tivare nella stufa a 20°, ho potuto isolare, ripetutamente, varî stipiti di una specie microbica fosforescente, che dà una bellissima luminosità nelle culture, e che sarà oggetto di particolari ricerche.

In attesa di potere esporre più ampiamente i risultati delle osservazioni morfologiche e culturali, fatte su questo microbio, posso già dire che, per il suo comportamento e per una quantità di caratteri riscontrati, mi sembra si avvicini molto a quelli ottenuti dagli organi fotogeni di Sepiola, dallo Zirpolo (1).

Un confronto preciso fra la mia e le sue culture è stato iniziato e spero poterne esporre al più presto i risultati, insieme ad alcune considerazioni sulla teoria simbiotica del Pierantoni.

Per ora, da quanto precede, posso concludere: che nessun microbio fotogeno fu trovato nell'interno degli organi luminosi di *Heteroteuthis dispar*, mentre essi erano senza dubbio presenti sulla superficie esterna degli animali esaminati, similmente a quanto si verifica in animali marini non fotogeni, con grandissima frequenza.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Cantone legge la seguente commemorazione del Socio straniero Gabriele Lippmann.

Nella tornata del 6 novembre l'Accademia ebbe l'annunzio della morte del Socio straniero Gabriele Lippmann, avvenuta il 12 luglio sul transatlantico *Paris* per male contratto durante il viaggio; non vi dispiaccia che alle nobili parole di sentito cordoglio pronunziate in quella occasione dal nostro illustre Presidente faccia seguire, ora, una breve esposizione della vita scientifica dell'insigne Collega estinto.

Gabriele Lippmann, nato ad Hollerich presso Lussemburgo nel 1845, risiedette fin dai primi anni a Parigi; ed ivi compì gli studî universitarî sotto la guida di Mascart, Debray e Bertin, l'ultimo dei quali lo ebbe particolarmente caro poichè avea avuto agio di apprezzare l'acutezza d'ingegno del giovane fisico, per quanto non accompagnata da facilità di adattamento ai metodi scolastici. Per siffatta indole, che dipendeva da un temperamento riflessivo ed insofferente di vincoli, il Lippmann, pure avendo dovuto subire qualche insuccesso nei primordî della carriera scientifica, seppe formarsi una solida coltura nei varî rami della fisica e della fisica matematica, coltura che venne completata negli anni di soggiorno in Germania, e cioè dal 1872

(1) Zirpolo G., *I batterii fotogeni degli organi luminosi di Sepiola intermedia*. Boll. Soc. Nat., vol. 30, pag. 206 [1918].

al 1874, in varî centri scientifici e specialmente nel laboratorio di Kirchhoff ad Heidelberg.

Le peregrinazioni compiute in tale periodo ebbero indubbiamente influenza benefica nello spirito del sagace osservatore, giacchè egli passò presto dal campo della pura astrazione scientifica alla vita pratica dello sperimentatore con un entusiasmo che appare in certo contrasto con la tendenza dimostrata prima verso gli studî teorici, coltivati quasi per soddisfazione personale. E svolse fin dall'inizio opera di maestro, quale poteva aspettarsi dalla lunga e profonda preparazione, portando nella ricerca una nota di originalità che si rivela nella limpida esposizione dei risultati in Note brevi, ma che dànno un'idea precisa del concetto che guidava l'autore nell'indagine, della perfetta rispondenza del metodo alla natura essenziale della ricerca, e delle applicazioni che poteano trarsi dai risultati, spesso tendenti a fini pratici di notevole importanza.

Tali pregi si riscontrano già nelle pubblicazioni riferentisi ai fenomeni elettrocapillari. In un primo lavoretto del 1872 si dà la giusta interpretazione del contrarsi delle gocce di mercurio, immerse in una soluzione acida, per il contatto con un filo di ferro; ed un anno dopo si comunica all'Accademia delle Scienze in una Nota di appena due pagine l'esito delle ricerche intese a mettere in evidenza i pregi di un elettrometro fondato sulle variazioni della tensione superficiale del mercurio dipendentemente dal potenziale di questo liquido, apprestandosi in tal modo alla scienza uno strumento che in esattezza e sensibilità supera, come egli stesso afferma, tutti quelli ideati per la misura dei dislivelli elettrici. Ed in vero la fisica, la chimica e le scienze biologiche molto devono a questo delicatissimo strumento; in quanto che per esso è stato possibile eseguire, con approssimazione fino ad 1/1000° di *volta* misure di forze elettromotrici in un campo estesissimo di ricerche, senza andare incontro alle difficoltà inerenti ad altri metodi meno precisi, e d'altra parte il fatto che la forza contrattile del mercurio in qualsiasi liquido dipende unicamente dal potenziale elettrico, giusta la dimostrazione diretta inoppugnabile datane dallo stesso Lippmann nel 1879, può considerarsi come l'origine di una serie di lavori d'indole teorica per i quali si è giunti, col Frenkel, a valutare la tensione superficiale del mercurio muovendo dall'ipotesi astronomica del Rutherford sulla costituzione elettrica dell'atomo.

Il rigore scientifico delle deduzioni del Lippmann deriva, come si accennò poco fa, dalla giusta impostazione dei problemi che egli imprese a trattare; e se ciò può dirsi dei lavori sperimentali, non diverso giudizio risulta dall'esame delle ricerche di natura teorica. Fra queste occupa un posto eminente lo studio sul principio di conservazione dell'elettricità, dove si pongono le basi di un indirizzo scientifico che trae le sue origini dai concetti fondamentali della termodinamica, trasportati nel campo della elettrologia

per lo stretto nesso fra i due ordini di studî riguardanti l'energia elettrica e la termica.

Messo in rilievo, con una pubblicazione preliminare, l'indole sperimentale del procedimento per cui fu condotto Carnot a stabilire il postulato che, sotto altra forma, costituisce ora il secondo principio della termodinamica, Gabriele Lippmann trova che al concetto di entropia si può far corrispondere l'altro di carica elettrica, trattandosi di grandezze similmente legate, alla temperatura in un caso, ed al potenziale elettrico nell'altro, e del pari connesse alle rispettive energie, sicchè, posto assai opportunamente il principio sperimentale di conservazione dell'elettricità sotto la forma $\int dm = 0$ per un ciclo chiuso di trasformazioni, e quindi considerato l'elemento di carica dm come un differenziale esatto, svolge i problemi di elettrostrizione dei gas e dei solidi, di piezoelettricità, e dei fenomeni elettrocapillari con un metodo schematico seducente mediante il quale si pongono in luce relazioni di dipendenza reciproca fra le variabili che intervengono nella produzione degli effetti dianzi cennati. Non può negarsi che si ha da fare con procedimenti dommatici da cui non emerge il meccanismo di produzione dei fenomeni, come nel caso di semplici applicazioni del principio di conservazione dell'energia; ma è pregio indiscutibile del metodo potersi accertare nel modo più facile proprietà che, in alcuni casi almeno, difficilmente si sarebbero intuite dal fisico per via diretta, senza contare l'utile che può ritrarsi dalle considerazioni fondamentali di stretta analogia tra i fenomeni termici ed elettrici in tempi in cui tutte le teorie sulla costituzione della materia si orientano verso un indirizzo essenzialmente elettrico.

Non minore genialità che in queste ricerche si riscontra nei lavori di Lippmann sulla fotografia dei colori. Il concetto da cui egli prese le mosse fu ardito, poichè, se poteva concepirsi la realizzazione di onde stazionarie mediante l'impiego di una superficie riflettente cui arrivi il sistema di onde che darebbero lo spettro, era assai difficile imaginare che si riuscisse ad avere nello spessore di 1/20 di millimetro di gelatina qualche centinaio di sottilissimi strati sensibilizzati dal processo fotografico, e che per giunta non venisse alterata la distribuzione con le operazioni destinate a sviluppare ed a fissare il deposito. Eppure a tanto egli pervenne dopo tentativi non pochi per ottenere le condizioni migliori dell'esperienza, scegliendo gelatine trasparenti e prive di nuclei visibili coi più potenti mezzi di osservazione, pose opportune, e sostanze assorbenti appropriate perchè la gradazione delle intensità nelle varie regioni dello spettro non risentisse l'effetto del potere attinico dei raggi non commisurato alla intensità delle sensazioni visive. Ma sopra tutto bisogna riconoscere che egli ebbe la mano felice, avendo saputo trarre partito dai fenomeni d'interferenza i quali trovano, con facilità maggiore che non si creda, la sede del loro svolgimento grazie al sovrapporsi degli effetti col ritmo regolare delle perturbazioni eteree e ad una certa

rigidità di struttura cristallina che ne consegue per la legge medesima di distribuzione di joni modificati dalle forze elettriche delle onde.

Gabriele Lippmann rese noto all'Accademia delle scienze il risultato della sua ricerca nella seduta del 2 febbraio 1891; epperò non pago dei primi successi attese per lungo tempo a studî sullo stesso argomento, sia per conseguire una fedele documentazione obiettiva dello spettro, sia per giungere alla fotografia di oggetti a colori non semplici, e risolse i due problemi in modo così completo da riscuotere il plauso universale, pur quando per ritrarre i colori si diffondeva un metodo scientificamente meno perfetto, ma di più facile attuazione dal punto di vista fotografico.

Si farebbe torto alla moltiforme genialità del fisico francese se fosse considerata l'opera scientifica di lui circoscritta nel campo delle ricerche sulle quali ho richiamato l'attenzione dei Colleghi, tanto più che in alcune parti di quella che suol riguardarsi come produzione secondaria si hanno lavori in cui emergono concetti teorici e criteri sperimentali degni certamente di particolare rilievo.

Così ad esempio egli si occupa degli schermi magnetici dimostrando con una semplice esperienza che la loro efficacia risiede nella grande permeabilità agli effetti d'induzione, risultando con questa un compenso fra l'azione diretta del campo e quella che deriva dalle masse magnetiche indotte, e trae occasione da tal genere di ricerche per dimostrare che per induzione non possono aversi correnti continue senza ricorrere a contatti striscianti; discute sulla legge generale d'induzione nei circuiti privi di resistenza mostrando quali conseguenze importanti si ricavano per il flusso d'induzione qualora si riesca, come in realtà è avvenuto con le classiche esperienze di Kamerling Onnes, ad operare con resistenze nulle; esamina le proprietà ottiche di una lamina polarizzata per escludere che nello strato superficiale del metallo alterato si creino variazioni di fase apprezzabili; mette in evidenza le proprietà elettriche depolarizzanti delle soluzioni saline in rapporto alla natura degli elettrodi immersi; costruisce un galvanometro perfettamente astatico mediante una doppia sospensione, ed altro ne inventa, che può servire anche da elettrodinamometro, mettendo a profitto l'azione associata della corrente e di un forte campo magnetico sopra una lamina di mercurio e trova che lo strumento risponde bene alla doppia funzione dal lato pratico; espone metodi ingegnosi per togliere ai pendoli le perturbazioni dovute ai meccanismi stessi che servono a mantenere il loro moto oscillatorio; attua mezzi idonei per mettere esattamente a fuoco i collimatori; intraprende studî accurati per la registrazione tanto delle onde sismiche quanto delle accelerazioni assolute del suolo; istituisce indagini di endosmosi fra liquidi, o gas, a temperature diverse; e non disdegna di prendere in esame questioni d'indole generale sulla capillarità, sulla temperatura assoluta, e sulla valutazione del tempo in base alla gravitazione universale.

I grandi meriti di Gabriele Lippmann furono presto riconosciuti; ed infatti nel 1883 egli occupò alla Sorbona la cattedra di fisica matematica, tre anni dopo passò a quella di fisica generale resa vacante per la morte di Jamin, assunse poi la direzione del *laboratorio di ricerche fisiche* dando impulso vigoroso alle indagini scientifiche in quella sede importantissima di studî, nel 1886 fu nominato membro dell'Accademia delle scienze, nel 1898 ricevette il premio Nobel per le ricerche sulla fotografia dei colori; e numerose altre distinzioni ottenne essendo chiamato a far parte delle maggiori Accademie, non esclusa la nostra che lo ebbe Socio fin dall'aprile del 1909.

Nella scienza, come nell'arte, non si compie vero progresso senza l'opera innovatrice di persone che sappiano dare un'impronta personale efficace al lavoro di evoluzione cui tende il nostro spirito; ed il valore di siffatta opera si rende più elevato se essa interviene in un periodo di stasi, come quella che si ebbe verso la metà del secolo scorso. Alla schiera di coloro che contribuirono in quel tempo ad un indirizzo salutare per le ricerche fisiche appartenne certamente il nostro compianto Collega, che alle doti di scienziato profondo associava quelle di Maestro dalle vedute larghe e veramente originali; e questa Accademia, che apprezza ogni alta attività negli svariati ordini della produzione intellettuale, manda oggi un mesto reverente saluto alla memoria di Gabriele Lippmann la cui lunga vita fu consacrata al culto dell'ideale scientifico volto al conseguimento dell'umano progresso.

Alcune parole aggiunge alla commemorazione il Socio Fano, ricordando quanta riconoscenza debbano i biologi alla memoria di Lippmann per l'aiuto grandissimo che alla biologia hanno dato gli apparecchi da quest'ultimo inventati.

Il Presidente Volterra informa i Soci che alla seduta assistono i professori Platania e Archibald. Comunica inoltre che l'Accademia sarà rappresentata alle commemorazioni dei Soci Ciamician e Dini, che avranno luogo, per il primo a Trieste il giorno 8 corr., e per il secondo a Pisa il giorno 12.

Il Socio Pirotta legge, a nome del Corrisp. Longo, la seguente commemorazione del Corrisp. Giovanni Arcangeli.

Il 16 luglio 1921, nell'età di 81 anno, serenamente si spegneva in Pisa Giovanni Arcangeli, uno dei più noti Botanici italiani.

Nato a Firenze il 18 luglio 1840, si laureò in Scienze Naturali nel 1862 all'Università di Pisa, e in questa Università il 3 novembre 1864 iniziò la sua carriera didattica e scientifica con la sua nomina ad Aiuto alla Cattedra di Botanica. Il 1° gennaio 1872 andò ad occupare la Cattedra di Storia Naturale nel R. Istituto Tecnico di Livorno, ove rimase fino al 1874, nel quale anno, con Decreto del 29 novembre, fu nominato Aggregato alla Cat-

tedra di Botanica nel R. Istituto di Studî Superiori di Firenze. Il 1° novembre 1879 andò, in seguito a concorso, Professore Ordinario di Botanica e Direttore dell'Orto Botanico nella R. Università di Torino. Breve fu il suo soggiorno colà, che, a decorrere dal 1° dicembre 1881, venne nominato Professore di Botanica e Direttore dell'Orto Botanico nella R. Università di Pisa. Ritornato così dove aveva compiuto i suoi studî ed iniziata la sua carriera didattica e scientifica, vi rimase ininterrottamente per ben 34 anni, cioè fino al 18 luglio 1915, quando, a causa dei limiti di età, collocato a riposo, Egli dovette con suo grande dolore abbandonare la Cattedra.

Egli però continuò sempre a far parte del Consiglio della Facoltà di Scienze dell'Università di Pisa giacchè, in seguito a voto della Facoltà, con Decreto del 5 dicembre 1915, venne nominato Professore Emerito, ed egli, neppure allora, non mancò mai d'intervenire ad alcuna funzione accademica a cui gli desse diritto la qualità di Professore Emerito; e lo ricordo presente anche pochi giorni prima della sua morte ad una seduta di Facoltà e ad una Laurea.

Zelante, scrupoloso nell'adempimento del proprio dovere, sentì fortemente la sua missione d'insegnante, e all'insegnamento attese sempre con amore e passione.

Fu uomo di vasta coltura chè non limitò il suo studio al campo già così ampio della Scienza delle piante, ma lo estese anche ad altre discipline più o meno affini per abbracciare da vero e completo naturalista tutto il mondo vivente e fisico che ci circonda. E durante il lungo periodo della sua direzione attese anche sempre con amore e competenza, al decoro e al miglioramento dello storico Orto Botanico Pisano. Sotto la sua direzione fu infatti accresciuta l'area dell'Orto stesso e in esso fu costruita l'Aula per le lezioni e un Istituto degno delle nobili tradizioni dell'Ateneo Pisano.

Alla sua lunga opera didattica corrisponde anche altrettanto lunga e feconda l'opera scientifica.

Esordisce nell'agone scientifico con una pubblicazione dal titolo: *Sopra alcune forme regolari delle cellule vegetali*, comparsa nel Nuovo Giornale Botanico Italiano del 1869, e da allora possiamo dire che ininterrottamente il suo nome compare nella Bibliografia botanica italiana.

Dai Funghi e dalle Alghe alle Fanerogame; dalla struttura delle cellule a quella delle foglie e dei fusti; dalla impollinazione e fecondazione alla struttura dei semi e alla loro germinazione; dallo studio delle forme normali a quelle mostruose e patologiche; dalla funzione vessillare a quella clorofilliana e trofilegica; dalle piante bussole a quelle parassite; dallo svolgimento di calore nelle piante agli effetti del freddo e del fulmine; dalle piante spontanee a quelle coltivate; dalle piante attualmente viventi a quelle fossili, non c'è campo, possiamo dire, della Botanica in cui Egli non abbia lavorato con competenza.

A lui si debbono anche due pregevoli trattati: il *Compendio della Flora Italiana*, che ebbe due edizioni completamente esaurite, ben noto a tutti i botanici italiani, e il *Compendio di Botanica*, che raggiunse la 5ª edizione, ad uso dei suoi studenti « i quali, Egli scrive, possono in esso ritrovare il sunto degli argomenti, che vengono man mano trattati » nelle lezioni.

Visse vita modesta, alieno da ogni pompa vana. E tale sua modestia si manifesta anche nelle ultime sue disposizioni testamentarie: « In seguito al mio decesso, lasciò scritto, intendo che siano escluse le partecipazioni ed ogni e qualunque manifestazione pomposa ».

Di animo forte nelle avversità della vita attese sempre sereno, nel silenzio e nel raccoglimento, ai suoi studî diletti ed anche in questi ultimi anni spesso ritornava nell'Orto a lui caro, dove aveva trascorso tanta parte della sua vita e con me affabilmente s'intratteneva a discorrere sia di problemi di Biologia vegetale — chè in lui gli anni non avevano affievolito l'amore per la scienza — sia di quelli assillanti pel nostro paese — poichè al di sopra di tutto Egli sentiva di essere italiano!

Serenamente, com'Egli visse, si è spento nella piena coscienza di non avere inutilmente spesa la sua lunga vita nel culto della scienza e nell'adempimento di ogni dovere.

Lascia vivo rimpianto in quanti lo ebbero maestro, collega, amico, in quanti ne conobbero le doti della mente e del cuore.

Alla sua memoria il nostro estremo riverente saluto.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

U. Sborgi e L. Ferri. *Sui borati — Sistema* $(NH_4)_2O$ — B_2O_3 — H_2O. *Diagramma temperatura — concentrazione* (pres. dal Socio Nasini).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Volterra offre, a nome dell'autore, un volume del professore H. Andoyer intitolato: *L'oeuvre scientifique de Laplace*, dando notizia dei pregi e della utilità della pubblicazione stessa.

Il Presidente segnala all'attenzione dei Soci anche il volume del Brigadiere Generale S. Braccialini, *I telemetri da costa e gli apparecchi accessori sistema Braccialini*, parlando della importanza del tema trattato nel volume stesso, e ricordando i progressi che alla telemetria l'autore ha saputo far compiere.

Il Segretario Castelnuovo presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste una raccolta di lettere di Jacopo Berzelius, pubblicata dalla R. Accademia delle scienze di Svezia, e un'altra raccolta di lettere di Carlo Linneo, edita per cura della Università di Upsala.

G. C.